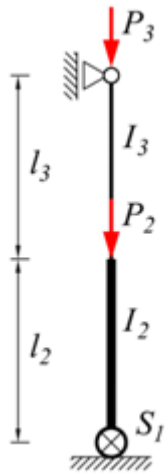
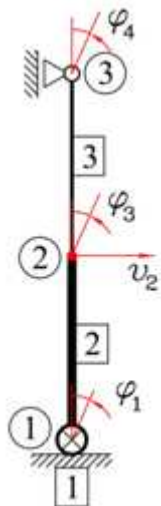


Polecenie

Określić wartość obciążenia krytycznego metodą wyznaczkową ustroju jak na rysunku.



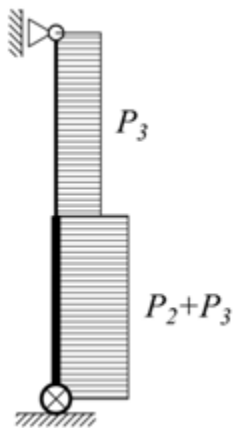
1. Numeracja węzłów, elementów, określenie aktywnych stopni swobody



• Wektor aktywnych stopni swobody

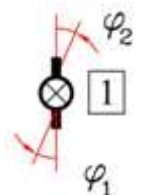
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

2. Określenie rozkładu sił normalnych



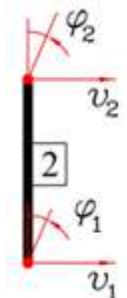
3. Modele matematyczne elementów w ich lokalnych układach współrzędnych

Element nr 1



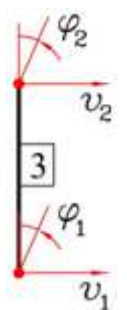
$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_1 = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Element nr 2



$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \frac{E \cdot I_2}{l_2^3} \cdot \begin{pmatrix} m_2 & n_2 \cdot l_2 & -m_2 & n_2 \cdot l_2 \\ n_2 \cdot l_2 & p_2 \cdot l_2^2 & -n_2 \cdot l_2 & q_2 \cdot l_2^2 \\ -m_2 & -n_2 \cdot l_2 & m_2 & -n_2 \cdot l_2 \\ n_2 \cdot l_2 & q_2 \cdot l_2^2 & -n_2 \cdot l_2 & p_2 \cdot l_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Element nr 3



$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{q}_3 \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \frac{E \cdot I_3}{l_3^3} \cdot \begin{pmatrix} m_3 & n_3 \cdot l_3 & -m_3 & n_3 \cdot l_3 \\ n_3 \cdot l_3 & p_3 \cdot l_3^2 & -n_3 \cdot l_3 & q_3 \cdot l_3^2 \\ -m_3 & -n_3 \cdot l_3 & m_3 & -n_3 \cdot l_3 \\ n_3 \cdot l_3 & q_3 \cdot l_3^2 & -n_3 \cdot l_3 & p_3 \cdot l_3^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

4. Transformacja modeli elementów do globalnego układu współrzędnych (GUW)

Ze względu na:

- wykorzystanie w analizie elementów belkowych,
- odpowiednie usytuowanie elementów względem globalnego układu współrzędnych - osie elementów mają takie same kierunki oraz zwroty jak osie globalnego układu współrzędnych (numeracja węzłów narasta zgodnie z kierunkami osi globalnego układu współrzędnych),

nie ma konieczności przeprowadzać transformacji modeli elementów z lokalnych układów współrzędnych do globalnego układu współrzędnych. Przy zachowaniu powyższych prawidłowości modele matematyczne w obydwu rodzajach układów mają taką samą postać.

5. Tworzenie globalnej macierzy sztywności wg procedury składania po elementach

- Tworzenie macierzy zgodności przemieszczeń z uwzględnieniem warunków brzegowych

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 1

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 2

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 3

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{q}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Globalna macierz sztywności**

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{a}_i)$$

$$\mathbf{K} \rightarrow \begin{pmatrix} S + \frac{E \cdot I_2 \cdot p_2}{l_2} & -\frac{E \cdot I_2 \cdot n_2}{l_2^2} & \frac{E \cdot I_2 \cdot q_2}{l_2} & 0 \\ -\frac{E \cdot I_2 \cdot n_2}{l_2^2} & \frac{E \cdot I_2 \cdot m_2}{l_2^3} + \frac{E \cdot I_3 \cdot m_3}{l_3^3} & \frac{E \cdot I_3 \cdot n_3}{l_3^2} - \frac{E \cdot I_2 \cdot n_2}{l_2^2} & \frac{E \cdot I_3 \cdot n_3}{l_3^2} \\ \frac{E \cdot I_2 \cdot q_2}{l_2} & \frac{E \cdot I_3 \cdot n_3}{l_3^2} - \frac{E \cdot I_2 \cdot n_2}{l_2^2} & \frac{E \cdot I_2 \cdot p_2}{l_2} + \frac{E \cdot I_3 \cdot p_3}{l_3} & \frac{E \cdot I_3 \cdot q_3}{l_3} \\ 0 & \frac{E \cdot I_3 \cdot n_3}{l_3^2} & \frac{E \cdot I_3 \cdot q_3}{l_3} & \frac{E \cdot I_3 \cdot p_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

6. Określenie wartości obciążenia krytycznego

Kryterium utraty stateczności wg metody wyznacznikowej

$$\det |\mathbf{K}| = 0$$

$\mu = 1$ jeśli nie uwzględnia się podatności pręta na ścinanie

Współczynniki dla siły ściskającej

$$\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{N}{\mu \cdot E \cdot I}}$$

$$m = \frac{\mu^2 \cdot \varepsilon^3 \cdot \sin(\varepsilon)}{2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon)) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon)} \quad p = \frac{\varepsilon \cdot (\sin(\varepsilon) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon))}{2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon)) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon)}$$

$$n = \frac{\mu \cdot \varepsilon^2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon))}{2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon)) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon)} \quad q = \frac{\varepsilon \cdot (\mu \cdot \varepsilon - \sin(\varepsilon))}{2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon)) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon)}$$

Dane do obliczeń

Moduł sprężystości $E = 21000 \frac{kN}{cm^2}$

Długość prętów $l_3 = 400 \text{ cm} \quad l_2 = 400 \text{ cm}$

Momenty bezwładności przekrojów $I_2 = 5000 \text{ cm}^4 \quad I_3 = 2500 \text{ cm}^4$

Sztywność węzła podatnego $S = 5 \cdot 10^6 \frac{kN \cdot cm}{rad}$

Obciążenie $P = 300 \text{ kN} \quad P_3 = P \quad P_2 = P$

Dla powyższych danych wykonano obliczenia wyznacznika macierzy sztywności $\det |\mathbf{K}|$ przyjmując 40 kolejnych przyrostów obciążenia ΔP o wartości 300 kN

$N_2 =$

	1
1	60
2	1200
3	1800
4	2400
5	3000
6	3600
7	4200
8	4800
9	5400
10	6000
11	6600
12	7200
13	7800
14	8400
15	9000
16	9600
17	10200
18	10800
19	11400
20	12000
21	12600
22	13200
23	13800
24	14400
25	15000
26	15600
27	16200
28	16800
29	17400
30	18000
31	18600
32	19200
33	19800
34	20400
35	21000
36	21600
37	22200
38	22800
39	23400
40	24000

$\epsilon_2 =$

	1
1	0.302
2	1.352
3	1.656
4	1.912
5	2.138
6	2.342
7	2.53
8	2.704
9	2.869
10	3.024
11	3.171
12	3.312
13	3.448
14	3.578
15	3.703
16	3.825
17	3.942
18	4.057
19	4.168
20	4.276
21	4.382
22	4.485
23	4.586
24	4.684
25	4.781
26	4.876
27	4.968
28	5.06
29	5.149
30	5.237
31	5.324
32	5.409
33	5.493
34	5.575
35	5.657
36	5.737
37	5.816
38	5.894
39	5.971
40	6.047

$\rho_2 =$

	1
1	0.009
2	0.185
3	0.278
4	0.371
5	0.463
6	0.556
7	0.648
8	0.741
9	0.834
10	0.926
11	1.019
12	1.112
13	1.204
14	1.297
15	1.39
16	1.482
17	1.575
18	1.667
19	1.76
20	1.853
21	1.945
22	2.038
23	2.131
24	2.223
25	2.316
26	2.409
27	2.501
28	2.594
29	2.686
30	2.779
31	2.872
32	2.964
33	3.057
34	3.15
35	3.242
36	3.335
37	3.428
38	3.52
39	3.613
40	3.705

	1
1	11.89
2	9.801
3	8.697
4	7.592
5	6.483
6	5.371
7	4.257
8	3.14
9	2.019
10	0.896
11	-0.231
12	-1.362
13	-2.496
14	-3.633
15	-4.775
16	-5.92
17	-7.07
18	-8.224
19	-9.382
$m_2 =$ 20	-10.545
21	-11.713
22	-12.886
23	-14.064
24	-15.248
25	-16.437
26	-17.632
27	-18.834
28	-20.042
29	-21.257
30	-22.479
31	-23.709
32	-24.947
33	-26.193
34	-27.448
35	-28.713
36	-29.987
37	-31.271
38	-32.567
39	-33.874
40	-35.193

	1
1	5.991
2	5.815
3	5.72
4	5.624
5	5.527
6	5.429
7	5.328
8	5.227
9	5.124
10	5.019
11	4.913
12	4.805
13	4.695
14	4.583
15	4.47
16	4.354
17	4.236
18	4.117
19	3.995
$n_2 =$ 20	3.87
21	3.744
22	3.614
23	3.482
24	3.348
25	3.21
26	3.07
27	2.926
28	2.779
29	2.629
30	2.475
31	2.317
32	2.155
33	1.989
34	1.819
35	1.644
36	1.464
37	1.279
38	1.088
39	0.892
40	0.689

	1
1	3.988
2	3.75
3	3.62
4	3.487
5	3.35
6	3.209
7	3.064
8	2.914
9	2.759
10	2.599
11	2.433
12	2.261
13	2.082
14	1.895
15	1.701
16	1.497
17	1.284
18	1.06
19	0.823
$p_2 =$ 20	0.573
21	0.307
22	0.025
23	-0.278
24	-0.603
25	-0.955
26	-1.337
27	-1.755
28	-2.217
29	-2.729
30	-3.305
31	-3.958
32	-4.711
33	-5.59
34	-6.637
35	-7.913
36	-9.512
37	-11.589
38	-14.422
39	-18.548
40	-25.188

	1
1	2.003
2	2.065
3	2.1
4	2.137
5	2.177
6	2.22
7	2.265
8	2.313
9	2.365
10	2.42
11	2.48
12	2.544
13	2.613
14	2.688
15	2.769
16	2.857
17	2.953
18	3.057
19	3.172
$q_2 =$ 20	3.297
21	3.436
22	3.59
23	3.76
24	3.951
25	4.165
26	4.407
27	4.681
28	4.995
29	5.358
30	5.779
31	6.275
32	6.866
33	7.579
34	8.456
35	9.556
36	10.975
37	12.868
38	15.51
39	19.44
40	25.877

$N_3 =$

	1
1	30
2	600
3	900
4	1200
5	1500
6	1800
7	2100
8	2400
9	2700
10	3000
11	3300
12	3600
13	3900
14	4200
15	4500
16	4800
17	5100
18	5400
19	5700
20	6000
21	6300
22	6600
23	6900
24	7200
25	7500
26	7800
27	8100
28	8400
29	8700
30	9000
31	9300
32	9600
33	9900
34	10200
35	10500
36	10800
37	11100
38	11400
39	11700
40	12000

$\epsilon_3 =$

	1
1	0.302
2	1.352
3	1.656
4	1.912
5	2.138
6	2.342
7	2.53
8	2.704
9	2.869
10	3.024
11	3.171
12	3.312
13	3.448
14	3.578
15	3.703
16	3.825
17	3.942
18	4.057
19	4.168
20	4.276
21	4.382
22	4.485
23	4.586
24	4.684
25	4.781
26	4.876
27	4.968
28	5.06
29	5.149
30	5.237
31	5.324
32	5.409
33	5.493
34	5.575
35	5.657
36	5.737
37	5.816
38	5.894
39	5.971
40	6.047

$\rho_3 =$

	1
1	0.009
2	0.185
3	0.278
4	0.371
5	0.463
6	0.556
7	0.648
8	0.741
9	0.834
10	0.926
11	1.019
12	1.112
13	1.204
14	1.297
15	1.39
16	1.482
17	1.575
18	1.667
19	1.76
20	1.853
21	1.945
22	2.038
23	2.131
24	2.223
25	2.316
26	2.409
27	2.501
28	2.594
29	2.686
30	2.779
31	2.872
32	2.964
33	3.057
34	3.15
35	3.242
36	3.335
37	3.428
38	3.52
39	3.613
40	3.705

$m_3 =$

	1
1	11.89
2	9.801
3	8.697
4	7.592
5	6.483
6	5.371
7	4.257
8	3.14
9	2.019
10	0.896
11	-0.231
12	-1.362
13	-2.496
14	-3.633
15	-4.775
16	-5.92
17	-7.07
18	-8.224
19	-9.382
20	-10.545
21	-11.713
22	-12.886
23	-14.064
24	-15.248
25	-16.437
26	-17.632
27	-18.834
28	-20.042
29	-21.257
30	-22.479
31	-23.709
32	-24.947
33	-26.193
34	-27.448
35	-28.713
36	-29.987
37	-31.271
38	-32.567
39	-33.874
40	-35.193

 $n_3 =$

	1
1	5.991
2	5.815
3	5.72
4	5.624
5	5.527
6	5.429
7	5.328
8	5.227
9	5.124
10	5.019
11	4.913
12	4.805
13	4.695
14	4.583
15	4.47
16	4.354
17	4.236
18	4.117
19	3.995
20	3.87
21	3.744
22	3.614
23	3.482
24	3.348
25	3.21
26	3.07
27	2.926
28	2.779
29	2.629
30	2.475
31	2.317
32	2.155
33	1.989
34	1.819
35	1.644
36	1.464
37	1.279
38	1.088
39	0.892
40	0.689

 $p_3 =$

	1
1	3.988
2	3.75
3	3.62
4	3.487
5	3.35
6	3.209
7	3.064
8	2.914
9	2.759
10	2.599
11	2.433
12	2.261
13	2.082
14	1.895
15	1.701
16	1.497
17	1.284
18	1.06
19	0.823
20	0.573
21	0.307
22	0.025
23	-0.278
24	-0.603
25	-0.955
26	-1.337
27	-1.755
28	-2.217
29	-2.729
30	-3.305
31	-3.958
32	-4.711
33	-5.59
34	-6.637
35	-7.913
36	-9.512
37	-11.589
38	-14.422
39	-18.548
40	-25.188

 $q_3 =$

	1
1	2.003
2	2.065
3	2.1
4	2.137
5	2.177
6	2.22
7	2.265
8	2.313
9	2.365
10	2.42
11	2.48
12	2.544
13	2.613
14	2.688
15	2.769
16	2.857
17	2.953
18	3.057
19	3.172
20	3.297
21	3.436
22	3.59
23	3.76
24	3.951
25	4.165
26	4.407
27	4.681
28	4.995
29	5.358
30	5.779
31	6.275
32	6.866
33	7.579
34	8.456
35	9.556
36	10.975
37	12.868
38	15.51
39	19.44
40	25.877

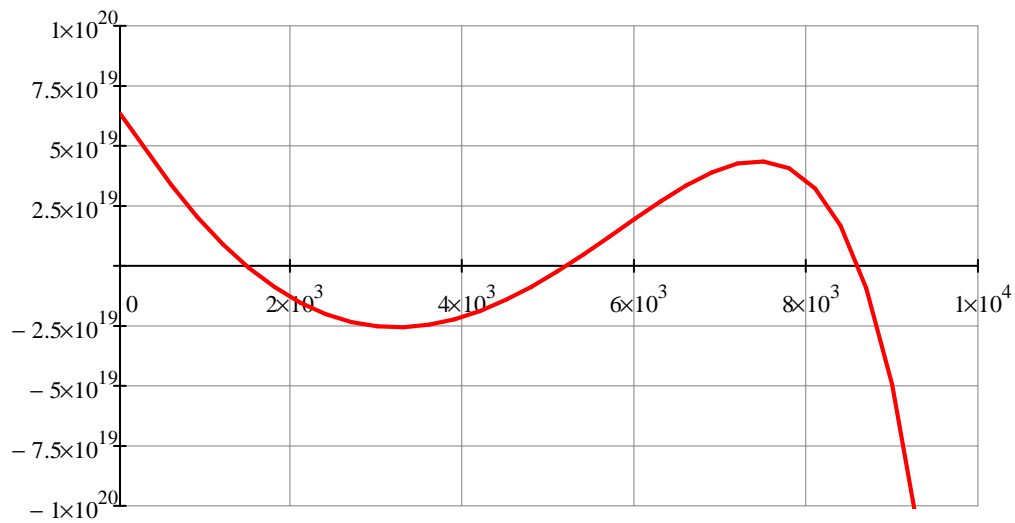
$P =$

	1
1	0.3
2	600
3	900
4	$1.2 \cdot 10^3$
5	$1.5 \cdot 10^3$
6	$1.8 \cdot 10^3$
7	$2.1 \cdot 10^3$
8	$2.4 \cdot 10^3$
9	$2.7 \cdot 10^3$
10	$3 \cdot 10^3$
11	$3.3 \cdot 10^3$
12	$3.6 \cdot 10^3$
13	$3.9 \cdot 10^3$
14	$4.2 \cdot 10^3$
15	$4.5 \cdot 10^3$
16	$4.8 \cdot 10^3$
17	$5.1 \cdot 10^3$
18	$5.4 \cdot 10^3$
19	$5.7 \cdot 10^3$
20	$6 \cdot 10^3$
21	$6.3 \cdot 10^3$
22	$6.6 \cdot 10^3$
23	$6.9 \cdot 10^3$
24	$7.2 \cdot 10^3$
25	$7.5 \cdot 10^3$
26	$7.8 \cdot 10^3$
27	$8.1 \cdot 10^3$
28	$8.4 \cdot 10^3$
29	$8.7 \cdot 10^3$
30	$9 \cdot 10^3$
31	$9.3 \cdot 10^3$
32	$9.6 \cdot 10^3$
33	$9.9 \cdot 10^3$
34	$1.02 \cdot 10^4$
35	$1.05 \cdot 10^4$
36	$1.08 \cdot 10^4$
37	$1.11 \cdot 10^4$
38	$1.14 \cdot 10^4$
39	$1.17 \cdot 10^4$
40	$1.2 \cdot 10^4$

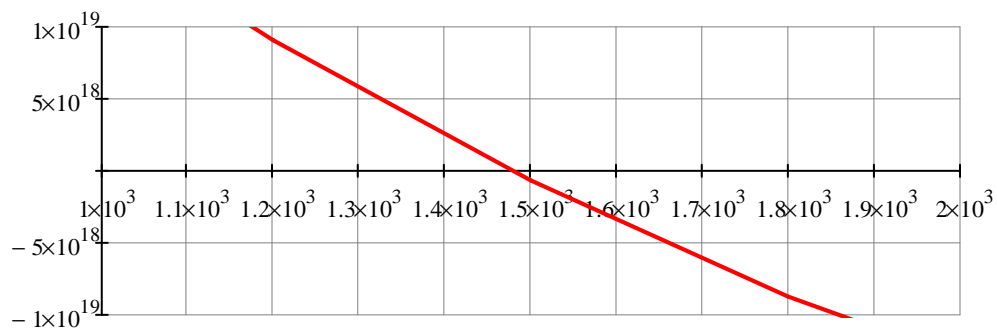
$det_K =$

	1
1	$6.357 \cdot 10^{19}$
2	$3.37 \cdot 10^{19}$
3	$2.053 \cdot 10^{19}$
4	$9.098 \cdot 10^{18}$
5	$-6.38 \cdot 10^{17}$
6	$-8.705 \cdot 10^{18}$
7	$-1.514 \cdot 10^{19}$
8	$-1.998 \cdot 10^{19}$
9	$-2.327 \cdot 10^{19}$
10	$-2.507 \cdot 10^{19}$
11	$-2.543 \cdot 10^{19}$
12	$-2.442 \cdot 10^{19}$
13	$-2.213 \cdot 10^{19}$
14	$-1.863 \cdot 10^{19}$
15	$-1.405 \cdot 10^{19}$
16	$-8.504 \cdot 10^{18}$
17	$-2.153 \cdot 10^{18}$
18	$4.82 \cdot 10^{18}$
19	$1.219 \cdot 10^{19}$
20	$1.969 \cdot 10^{19}$
21	$2.697 \cdot 10^{19}$
22	$3.361 \cdot 10^{19}$
23	$3.91 \cdot 10^{19}$
24	$4.274 \cdot 10^{19}$
25	$4.367 \cdot 10^{19}$
26	$4.074 \cdot 10^{19}$
27	$3.245 \cdot 10^{19}$
28	$1.674 \cdot 10^{19}$
29	$-9.187 \cdot 10^{18}$
30	$-4.928 \cdot 10^{19}$
31	$-1.092 \cdot 10^{20}$
32	$-1.974 \cdot 10^{20}$
33	$-3.267 \cdot 10^{20}$
34	$-5.173 \cdot 10^{20}$
35	$-8.032 \cdot 10^{20}$
36	$-1.244 \cdot 10^{21}$
37	$-1.951 \cdot 10^{21}$
38	$-3.158 \cdot 10^{21}$
39	$-5.409 \cdot 10^{21}$
40	$-1.025 \cdot 10^{22}$

Zależność pomiędzy obciążeniem P a wartością wyznacznika macierzy sztywności $|\mathbf{K}|$



Wartość obciążenia krytycznego analizowanego ustroju określana jest dla **pierwszego miejsca zerowego** zależności $|\mathbf{K}| - \mathbf{P}$



Na podstawie powyższego wykresu szacowana wartość obciążenia krytycznego wynosi $P_{cr} = 1480 \text{ kN}$

Wartości sił krytycznych w elementach

$$N_{cr.2} = 2P_{cr} \quad N_{cr.2} = 2960 \text{ kN}$$

$$N_{cr.3} = P_{cr} \quad N_{cr.3} = 1480 \text{ kN}$$