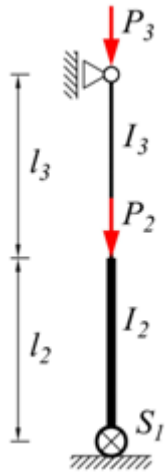
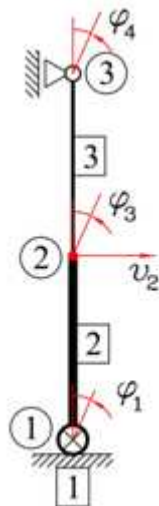


Polecenie

Określić wartość obciążenia krytycznego metodą wartości własnych macierzy sztywności ustroju jak na rysunku.



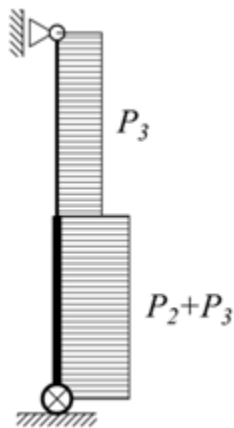
1. Numeracja węzłów, elementów, określenie aktywnych stopni swobody



• Wektor aktywnych stopni swobody

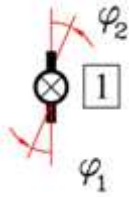
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

2. Określenie rozkładu sił normalnych



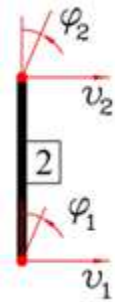
3. Modele matematyczne elementów w ich lokalnych układach współrzędnych

Element nr 1



$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_{E_1} \cdot \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{E_1} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

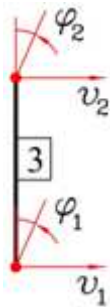
Element nr 2



$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_{E_2} + \mathbf{K}_{G_2} \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{E_2} = \frac{E \cdot I_2}{l_2^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot l_2 & -12 & 6 \cdot l_2 \\ 6 \cdot l_2 & 4 \cdot l_2^2 & -6 \cdot l_2 & 2 \cdot l_2^2 \\ -12 & -6 \cdot l_2 & 12 & -6 \cdot l_2 \\ 6 \cdot l_2 & 2 \cdot l_2^2 & -6 \cdot l_2 & 4 \cdot l_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{G_2} = \frac{N}{l_2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \cdot l_2 & -a & b \cdot l_2 \\ b \cdot l_2 & c \cdot l_2^2 & -b \cdot l_2 & d \cdot l_2^2 \\ -a & -b \cdot l_2 & a & -b \cdot l_2 \\ b \cdot l_2 & d \cdot l_2^2 & -b \cdot l_2 & c \cdot l_2^2 \end{pmatrix}$$

Element nr 3



$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{q}_3 \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_{E_3} + \mathbf{K}_{G_3} \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{E_3} = \frac{E \cdot I_3}{l_3^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot l_3 & -12 & 6 \cdot l_3 \\ 6 \cdot l_3 & 4 \cdot l_3^2 & -6 \cdot l_3 & 2 \cdot l_3^2 \\ -12 & -6 \cdot l_3 & 12 & -6 \cdot l_3 \\ 6 \cdot l_3 & 2 \cdot l_3^2 & -6 \cdot l_3 & 4 \cdot l_3^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{G_3} = \frac{N}{l_3} \cdot \begin{pmatrix} a & b \cdot l_3 & -a & b \cdot l_3 \\ b \cdot l_3 & c \cdot l_3^2 & -b \cdot l_3 & d \cdot l_3^2 \\ -a & -b \cdot l_3 & a & -b \cdot l_3 \\ b \cdot l_3 & d \cdot l_3^2 & -b \cdot l_3 & c \cdot l_3^2 \end{pmatrix}$$

4. Transformacja modeli elementów do globalnego układu współrzędnych (GUW)

Ze względu na:

- wykorzystanie w analizie elementów belkowych,
- odpowiednie usytuowanie elementów względem globalnego układu współrzędnych - osie elementów mają takie same kierunki oraz zwroty jak osie globalnego układu współrzędnych (numeracja węzłów narasta zgodnie z kierunkami osi globalnego układu współrzędnych),

nie ma konieczności przeprowadzać transformacji modeli elementów z lokalnych układów współrzędnych do globalnego układu współrzędnych. Przy zachowaniu powyższych prawidłowości modele matematyczne w obydwu rodzajach układów mają taką samą postać.

5. Tworzenie globalnej macierzy sztywności wg procedury składania po elementach

- Tworzenie macierzy zgodności przemieszczeń z uwzględnieniem warunków brzegowych

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 1

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{q}$$
$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 2

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{q}$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz zgodności przemieszczeń elementu nr 3

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{q}$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Globalna macierz sztywności

$$\mathbf{K}_E = \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{a}_i^T \cdot (\mathbf{K}_{E_i}) \cdot \mathbf{a}_i \right] \quad \mathbf{K}_E \rightarrow \begin{pmatrix} S + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{l_2^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} & 0 \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{l_2^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I_2}{l_2^3} + \frac{12 \cdot E \cdot I_3}{l_3^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_3}{l_3^2} - \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{l_2^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_3}{l_3^2} \\ \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_3}{l_3^2} - \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{l_2^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} + \frac{4 \cdot E \cdot I_3}{l_3} & \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_3}{l_3^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} & \frac{4 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{a}_i^T \cdot (\mathbf{K}_{G_i}) \cdot \mathbf{a}_i \right] \quad \mathbf{K}_G \rightarrow \begin{pmatrix} N_2 \cdot c \cdot l_2 & -N_2 \cdot b & N_2 \cdot d \cdot l_2 & 0 \\ -N_2 \cdot b & \frac{N_2 \cdot a}{l_2} + \frac{N_3 \cdot a}{l_3} & N_3 \cdot b - N_2 \cdot b & N_3 \cdot b \\ N_2 \cdot d \cdot l_2 & N_3 \cdot b - N_2 \cdot b & N_2 \cdot c \cdot l_2 + N_3 \cdot c \cdot l_3 & N_3 \cdot d \cdot l_3 \\ 0 & N_3 \cdot b & N_3 \cdot d \cdot l_3 & N_3 \cdot c \cdot l_3 \end{pmatrix}$$

6. Określenie wartości obciążenia krytycznego

Kryterium utraty stateczności wg metody wartości własnych macierzy sztywności

$$\det \left| \mathbf{K}_E + \lambda \cdot \mathbf{K}_G(\mathbf{N}_0) \right| = 0$$

Współczynniki macierzy sztywności geometrycznej

$$a = \frac{-6}{5} \quad b = \frac{-1}{10} \quad c = \frac{-2}{15} \quad d = \frac{1}{30}$$

Dane do obliczeń

Moduł sprężystości $E = 21000 \frac{kN}{cm^2}$

Długość prętów $l_3 = 400 \text{ cm}$ $l_2 = 400 \text{ cm}$

Momenty bezwładności przekrojów $I_2 = 5000 \text{ cm}^4$ $I_3 = 2500 \text{ cm}^4$

Sztywność węzła podatnego $S = 5 \cdot 10^6 \frac{kN \cdot cm}{rad}$

Obciążenie $P = 300 \text{ kN}$ $P_3 = P$ $P_2 = P$

Stan sił normalnych w elementach $N_3 = P_3$ $N_2 = P_2 + P_3$

$$\det |\mathbf{K}_E + \lambda \cdot \mathbf{K}_G(N_0)| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 213.3073 \\ 22.28508 \\ 47.40657 \\ 5.032277 \end{pmatrix} \quad \lambda = 5.032277$$

Wartość obciążenia krytycznego

$$P_{cr} = P \cdot \lambda \quad P_{cr} = 1510 \text{ kN}$$

Wartości sił krytycznych w elementach

$$N_{cr,2} = 2P_{cr} \quad N_{cr,2} = 3019 \text{ kN}$$

$$N_{cr,3} = P_{cr} \quad N_{cr,3} = 1510 \text{ kN}$$